Les Filtres Numériques

Tutoriel CREx

06-02-2014

Tout simplement…

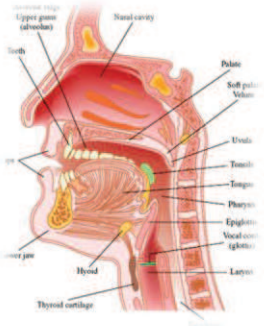
- Un filtre prend un signal d’entrée et crée un signal de sortie.

- Normalement, un filtre implique une modification du signal…

- N’import quelle opération sur un signal peut être décrit comme un filtre.

Qu’est ce que c’est un filtre?

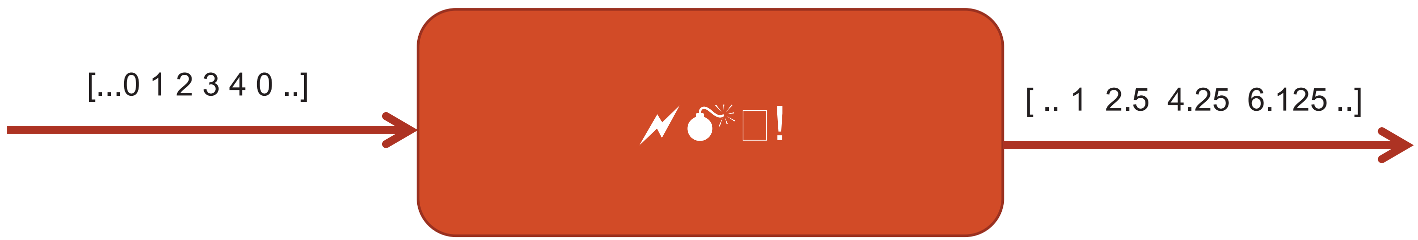
BLRI
Brain & Language Research Institute



Un filtre numérique effectue des opérations mathématiques sur une séquence, discrète, échantillonnée…

…pour…

réduire certains aspects du signal ou augmenter d'autres



On peut décrire des filtres par plusieurs caractéristiques:

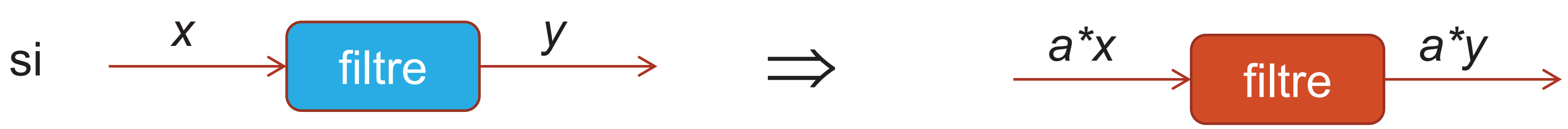
- **Linéarité** et **non-linéarité**
- **Invariance dans le temps** vs **variance dans le temps**
- **Filtres Adaptifs** vs **filtres non-adaptifs**
- **Filtres Récursifs** vs **filtres non-récursifs**
- Forme directe, forme cascade, forme parallèle et filtre « lattice ».

Filtres Linéaire et Invariant dans le Temps (LTI)

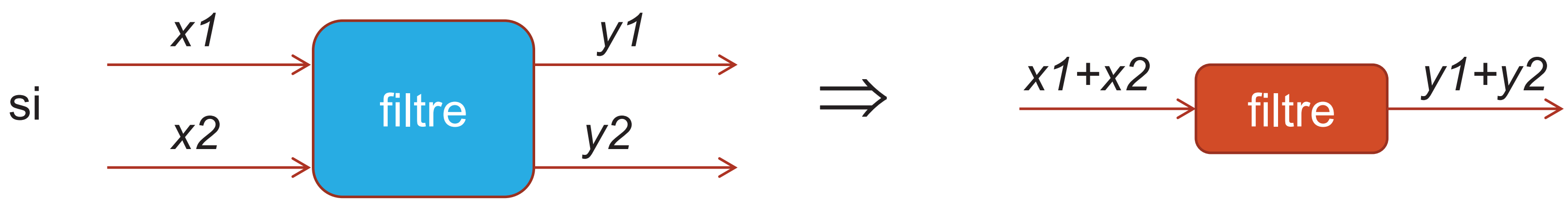
La plupart des filtres qu'on va utiliser ont les propriétés de:

Linéarité et **Invariance dans le Temps**

- **<u>Linéarité</u>**
    - Proportionnalité:



    - Superposition:



Linéaire ➔ des composants spectrales ne sont pas ajoutées.

Vrai pour tout système linéaire.

- **<u>Invariance dans le Temps</u>**

un retard de *T* échantillons

Si le signal d'entrée est retardé par *N* échantillons,

➔le signal de sortie sera retardé par *N* échantillons.

Le filtre comme une boîte noire…

$x(n)$ → ??? → $y(n)$

Comment savoir l'effet d'un filtre donné sur l'ensemble d'un signal d'entrée ?

Tout comme les signaux

⇓

On peut représenter l'action des filtres dans les domaines

fréquentiels et temporels

Quel effet du filtre sur les composants fréquentielles de mon signal?

Quel sont les changements du signal que nous voulons introduire/éviter au signal au cours du temps?

Si le filtre est linéaire on sait que tout les composants spectrales sont traitées indépendamment

$\Downarrow$

Examiner son effet sur chaque composante spectrales du signal d'entrée

$\Downarrow$

La Réponse Fréquentielle (*h(w)*) ou Le Fonction de Gain

Le gain d'amplitude d'un filtre en fonction des fréquences.
Ou
La proportion de l'entrée d'un filtre qui reste dans sa sortie.

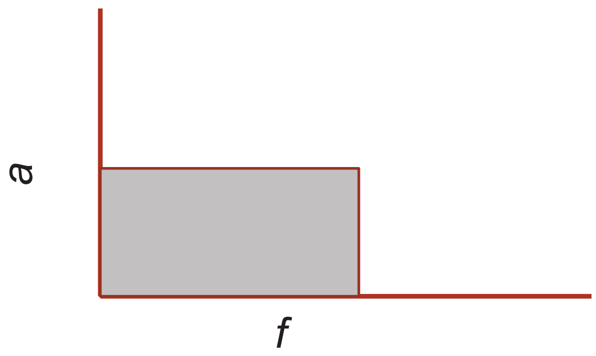
Gain = 0.0 ➔ atténuation complète d'une fréquence.
Gain = 1.0 ➔ pas d'atténuation.

Filtres Numériques

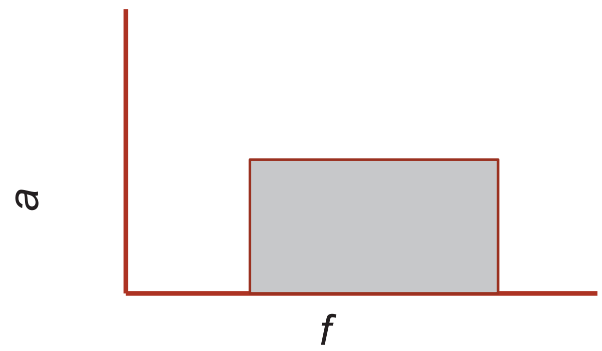
Réponse Fréquentielle (RF)

RF - Fonctions Boxcar

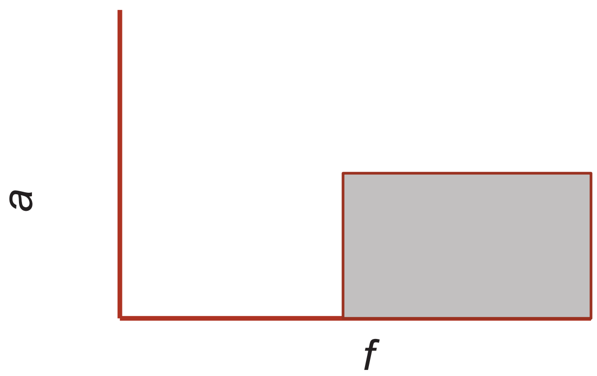
Passe-bas



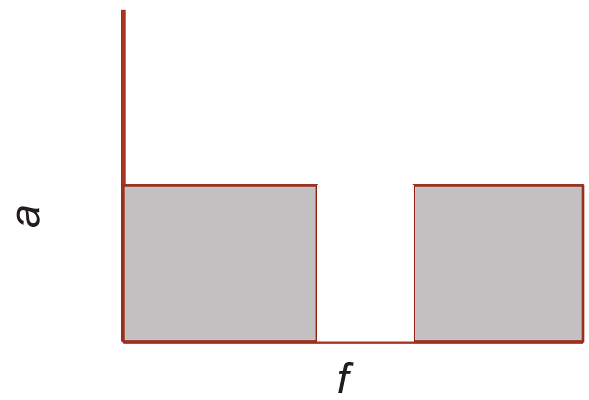
Passe-bande



Passe-haut



Coupe-bande

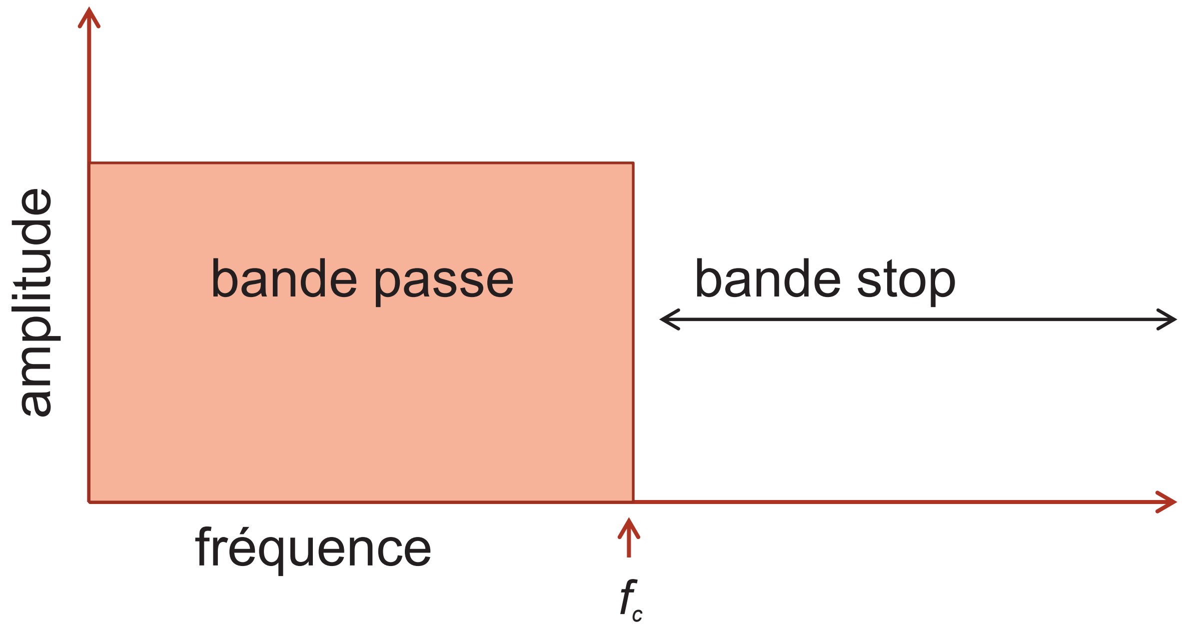


a = amplitude ou gain   *f* = fréquence

Filtres Numériques — Réponse Fréquentielle

BLRI Brain & Language Research Institute

RF idéale d'un filtre **Passe-bas**



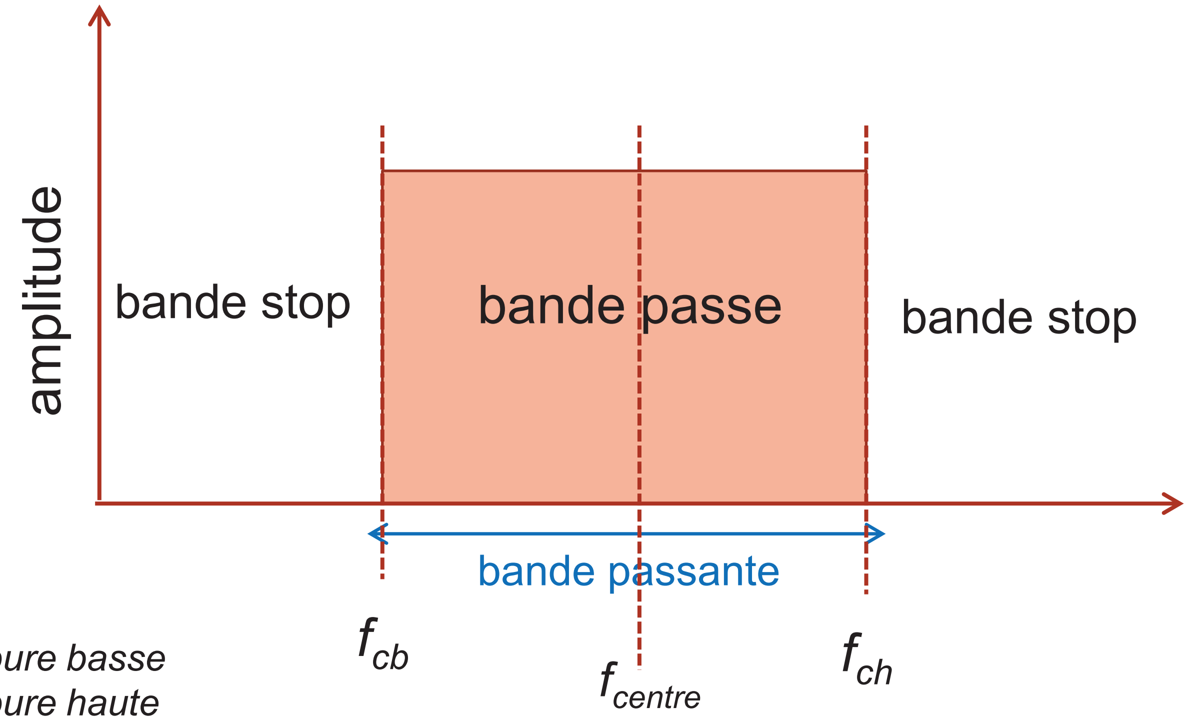
f_c = *fréquence de coupure* (Hz)

Ce filtre a pour fonction d'atténuer les fréquences supérieures (la bande stop) à sa **fréquence de coupure**, f_c, dans le but de conserver uniquement les basses fréquences (la bande passe).

Filtres Numériques

Réponse Fréquentielle

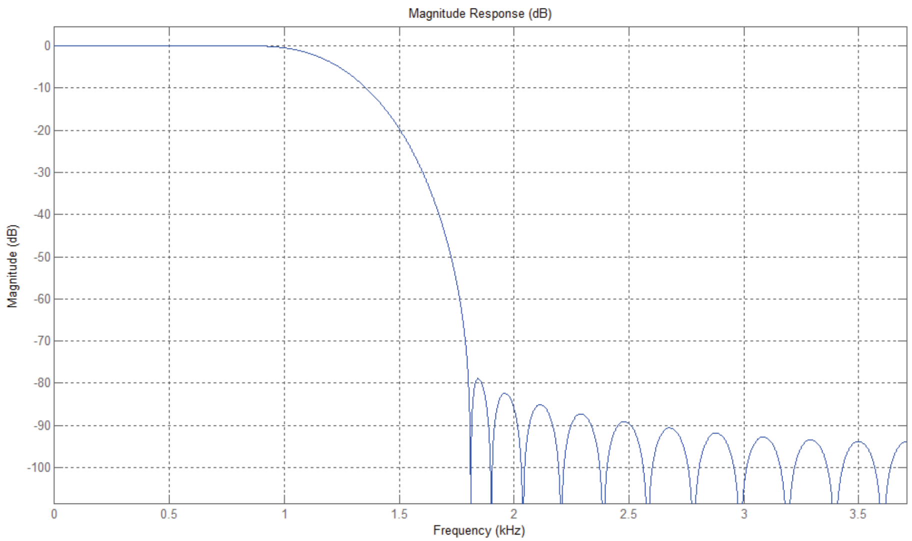
RF idéale d'un filtre **Passe-bande**



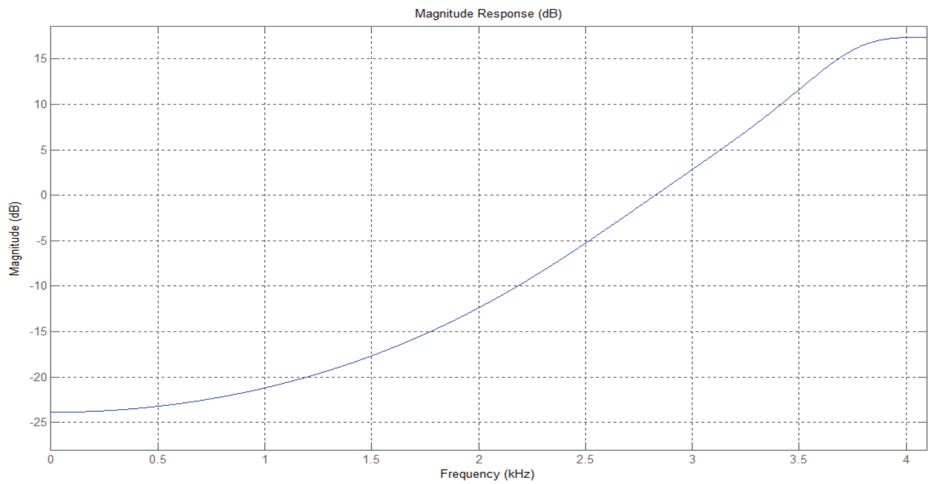
f_{cb} = fréquence de coupure basse
f_{ch} = fréquence de coupure haute
f_{centre} = fréquence centrale

Ce filtre a pour fonction de laisser passer qu'une bande ou intervalle de fréquences, la bande passante, entre une fréquence de coupure basse, f_{cb} et une fréquence de coupure haute, f_{ch}, et autour d'une fréquence centrale, f_{centre} .

Exemples

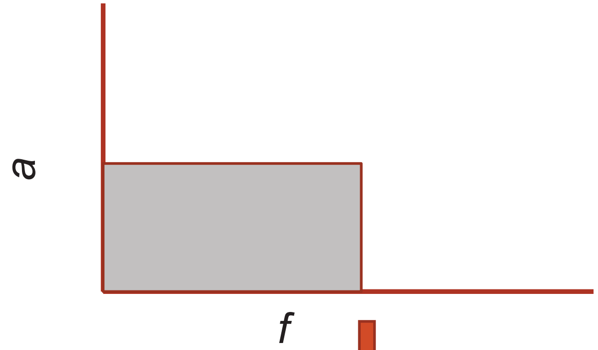


Une transition graduelle entre la bande-passe et la bande-stop

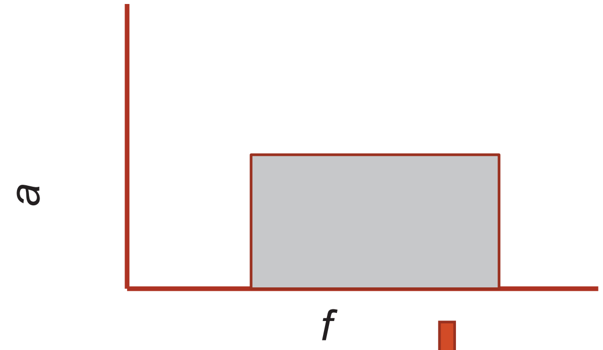


A partir d'un filtre passe-bas et passe-bande…

Passe-bas

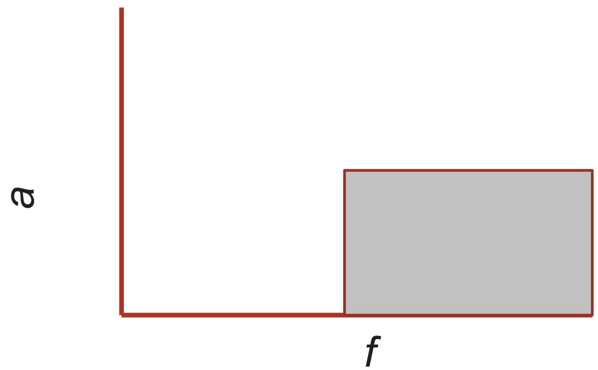


Passe-bande

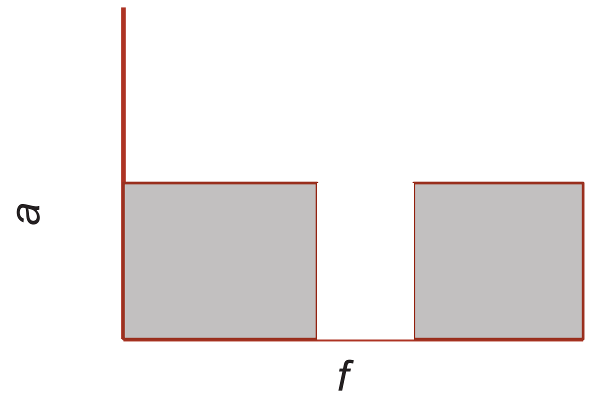


On crée….

Passe-haut



Coupe-bande



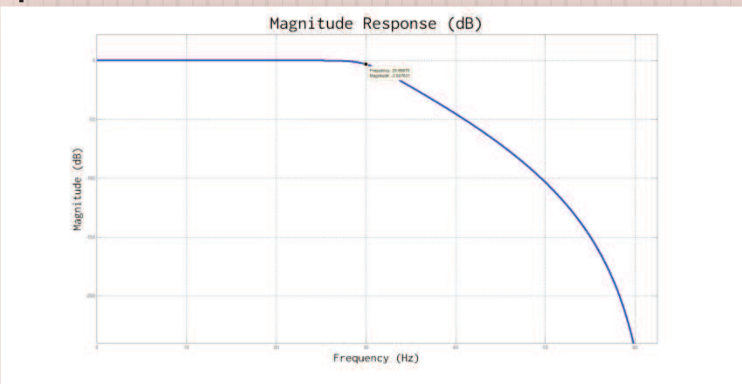
Filtres Numériques | Représentation Fréquentiel

La Réponse Fréquentielle ou **Fonction de Transfert**

- **Un description complète de la réponse fréquentielle comprend….**

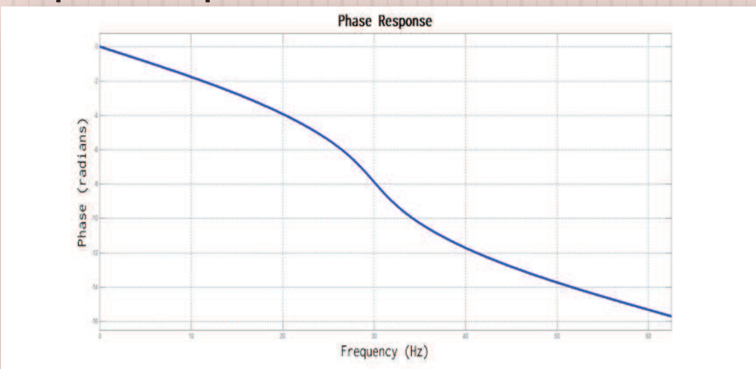
La Réponse Fréquentielle:

Comment le filtre change l'amplitude des fréquences.



La Réponse de Phase:

Comment le filtre change la phase de chaque fréquence.

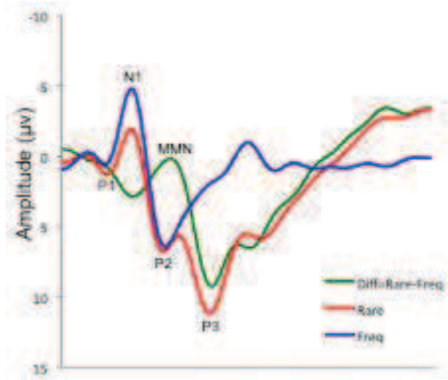


Filtrer dans le domaine temporel

POURQUOI?

BLRI
Brain & Language Research Institute

Quand on filtre dans le domaine fréquentiel, quel effet sur le signal temporel… quel effet sur les PEs?



Domaine temporel

Un filtre appliqué sur un signal dans le domaine fréquentielle aura un effet sur les caractéristiques temporelles du signal aussi…

Un mauvais filtrage (domaine fréquentiel) peut déformer des PEs (domaine temporel)

BLRI
Brain & Language Research Institute

Données temporels d'entrée: $X_t, X_{t+p}, X_{t+2p}, X_{t+3p}, \ldots X_{t+(n-1)p}$

t = le moment du début de l'enregistrement des donnés
p = la période d'échantillonnage (intervalle entre chaque échantillon)

La valeur filtrée de chaque échantillon est calculé en utilisant l'échantillon non filtré correspondant (X_n)

et..

Un nombre égale d'échantillons non filtrés *(j)* avant et après l'échantillon à filtrer X_{n-j}, X_{n+j}, respectivement.

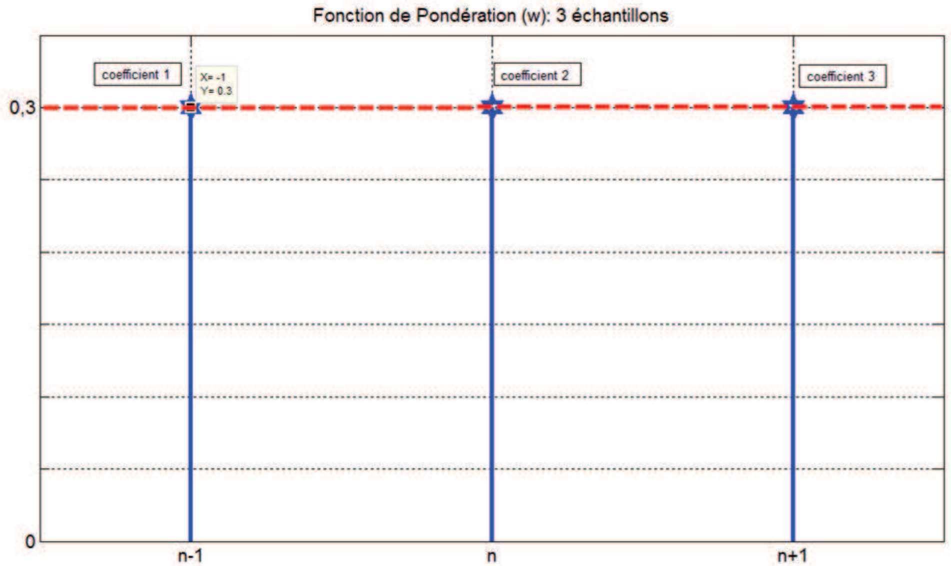
On définit:

- Le nombres d'échantillons avant et après X_n qui va contribuer à son filtrage, *j*.
- Le poids de chaque échantillons: une valeur, *W*, définissant sa contribution

La Fonction de Pondération du filtre

Un filtre très simple:

- *j = 1* ➔ X_{n-1}, X_n, X_{n+1}
- *nombre d'échantillons contribuant à la valeur filtrée de Xn, N = 2j +1 = 3*
- *W* égal pour chaque échantillon contribuant ➔ $W = \frac{1}{N} = \frac{1}{3}$



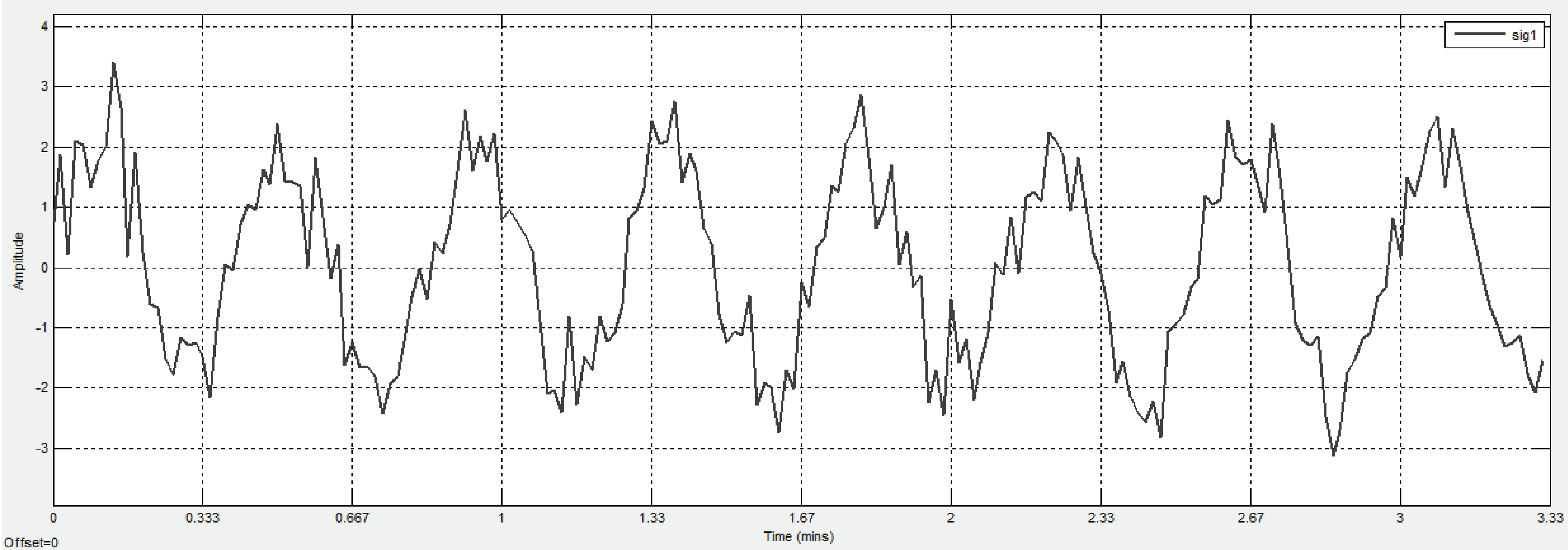
La Fonction de Pondération

Forme « Boxcar »
3 valeurs ou coefficients égaux.

Filtrer dans le domaine temporel — Un exemple simple

Application du filtre simple, Boxcar

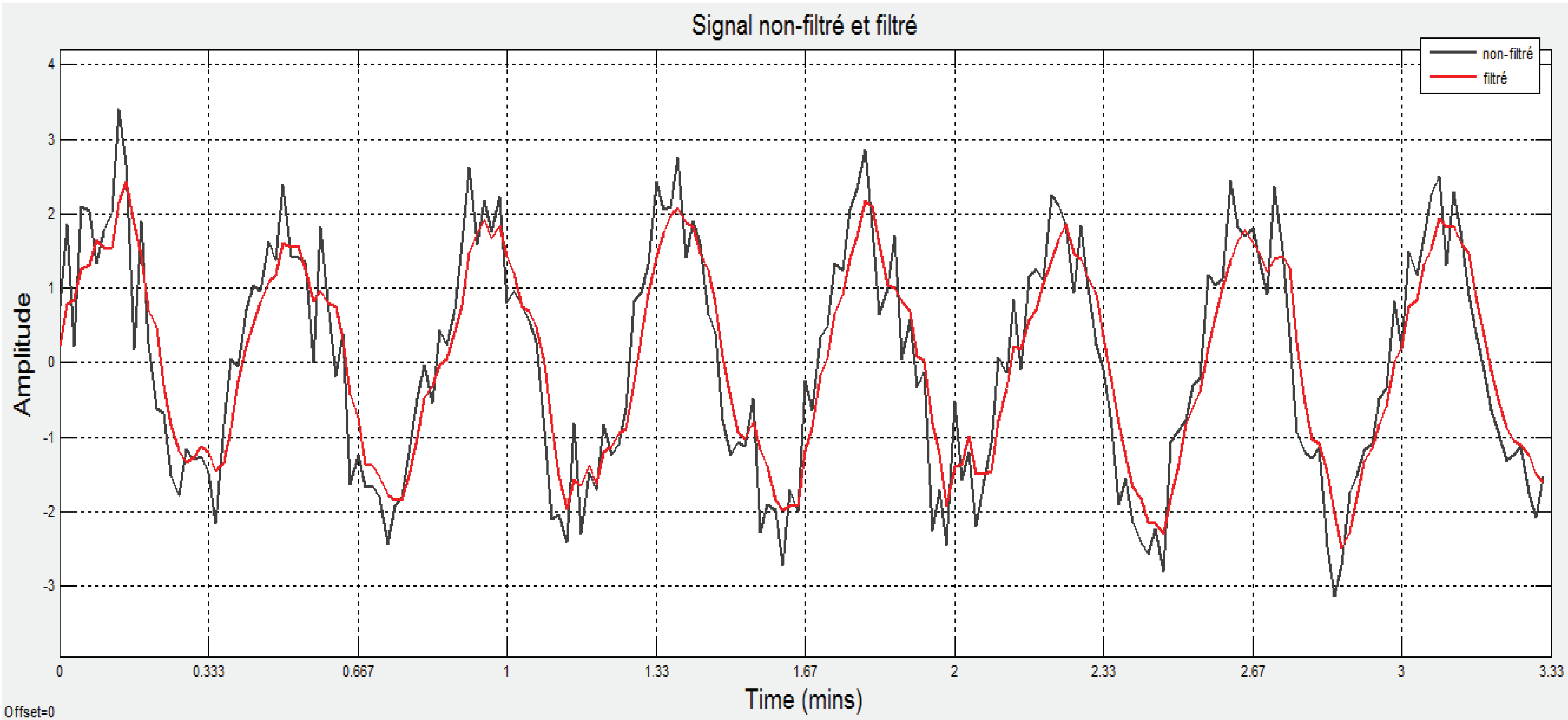
Signal d'entrée



FILTRER!

Filtrer dans le domaine temporel | Un exemple simple

Application du filtre simple, Boxcar



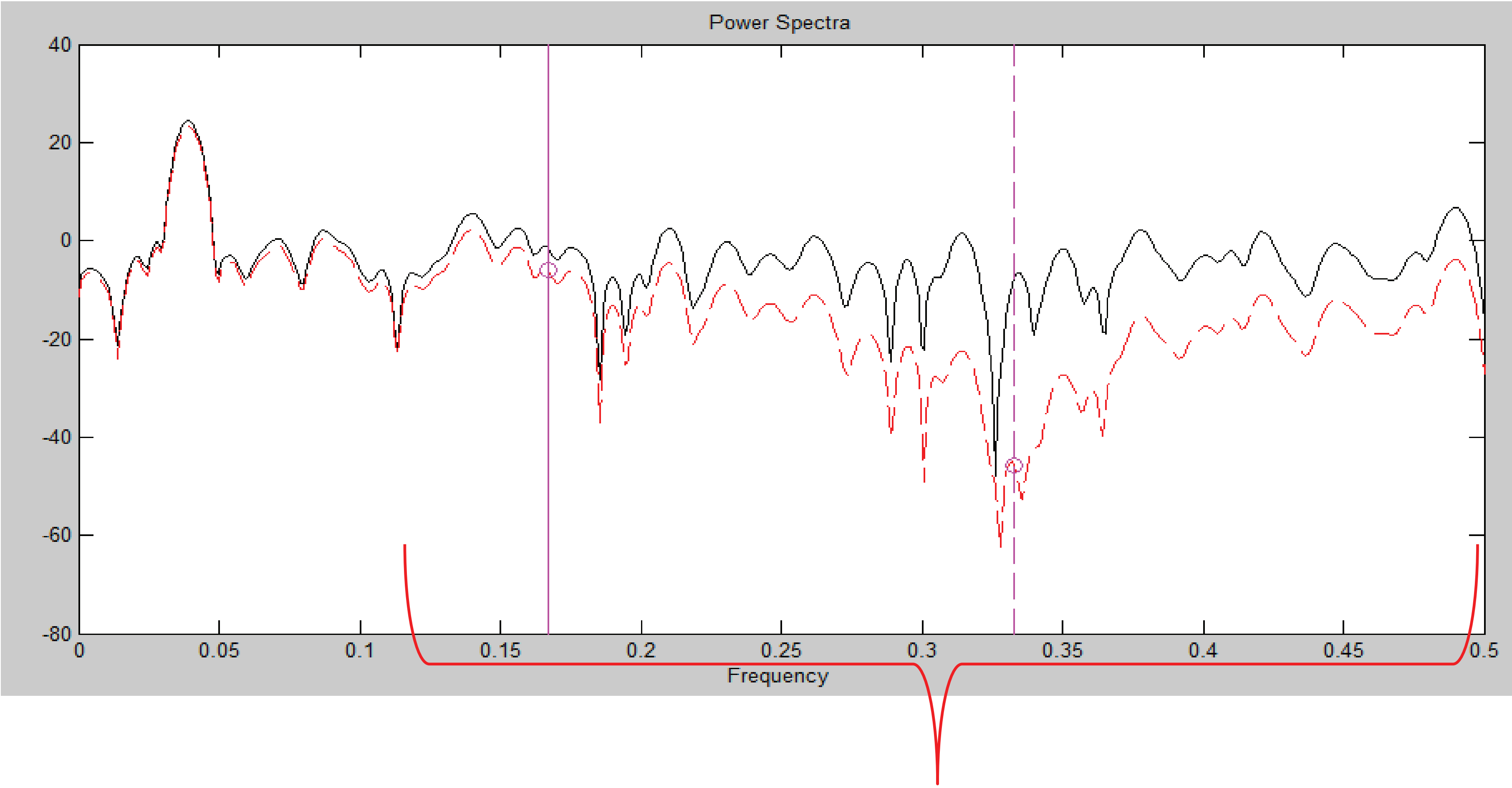
Le filtre a changé le signal dans quelle manière?

Il a lissé le signal, autrement dit, il a enlever certaines hautes fréquences!

Filtrer dans le domaine temporel | Un exemple simple

Application du filtre simple, Boxcar

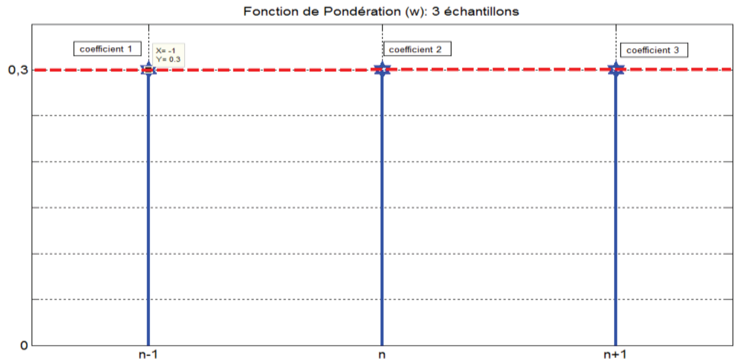
…et leurs composantes spectrales comparées…



Une réduction de la magnitude des fréquences plus hautes

Varier la fonction de pondération

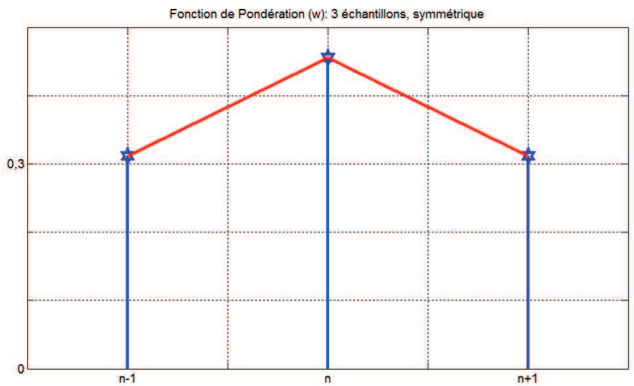
Mais, chacun des échantillons contribue équitablement ➔ grande perte de précision temporel



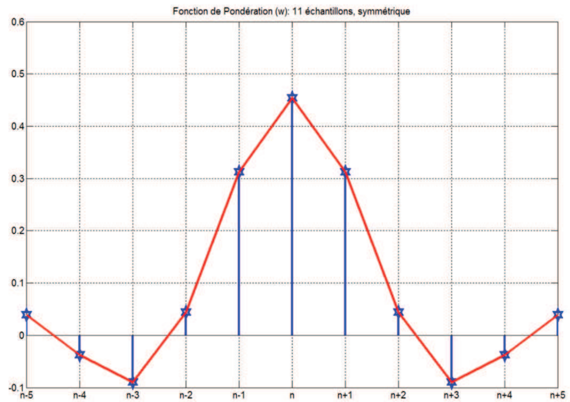
Pour générer un filtre approprié à une application donnée:

- Varier les valeurs de pondération (coefficients) (A)
- Augmenter le nombre d'échantillons contribuant à la valeur filtrée de X_n (B)

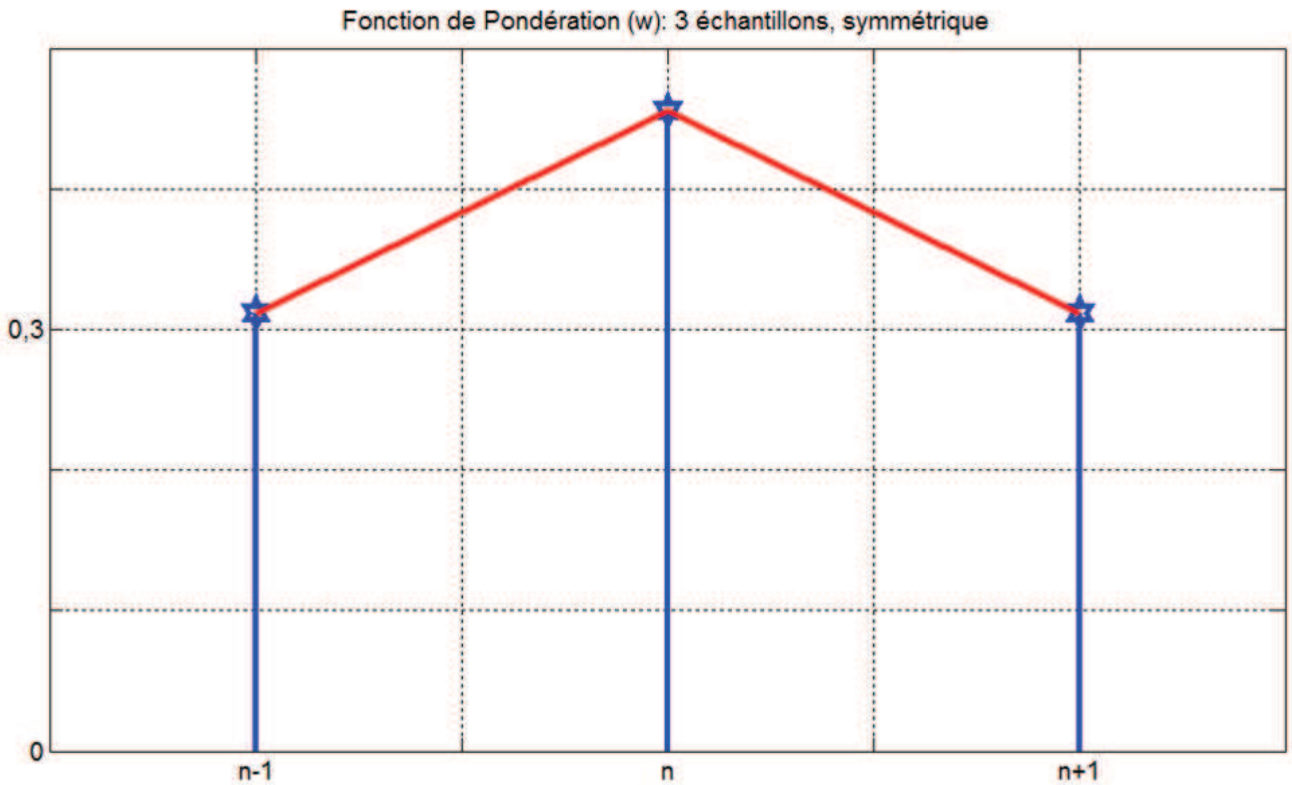
A



B

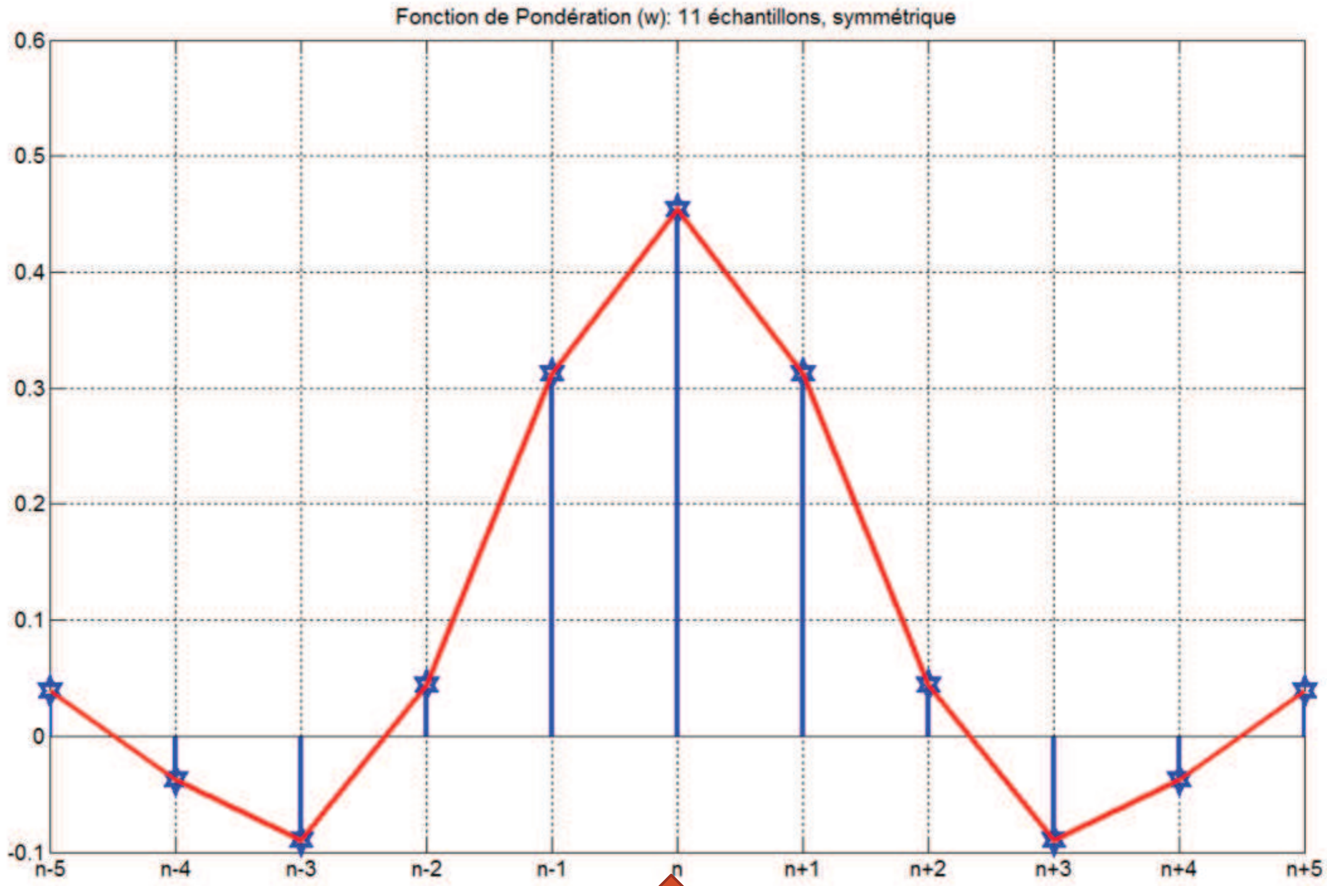


Varier la fonction de pondération



Un fonction de pondération symétrique (pas boxcar).
N = 3 (*j = 1*)
L'ordre du filtre = N-1 ➔ filtre de 2ième ordre

Varier la fonction de pondération

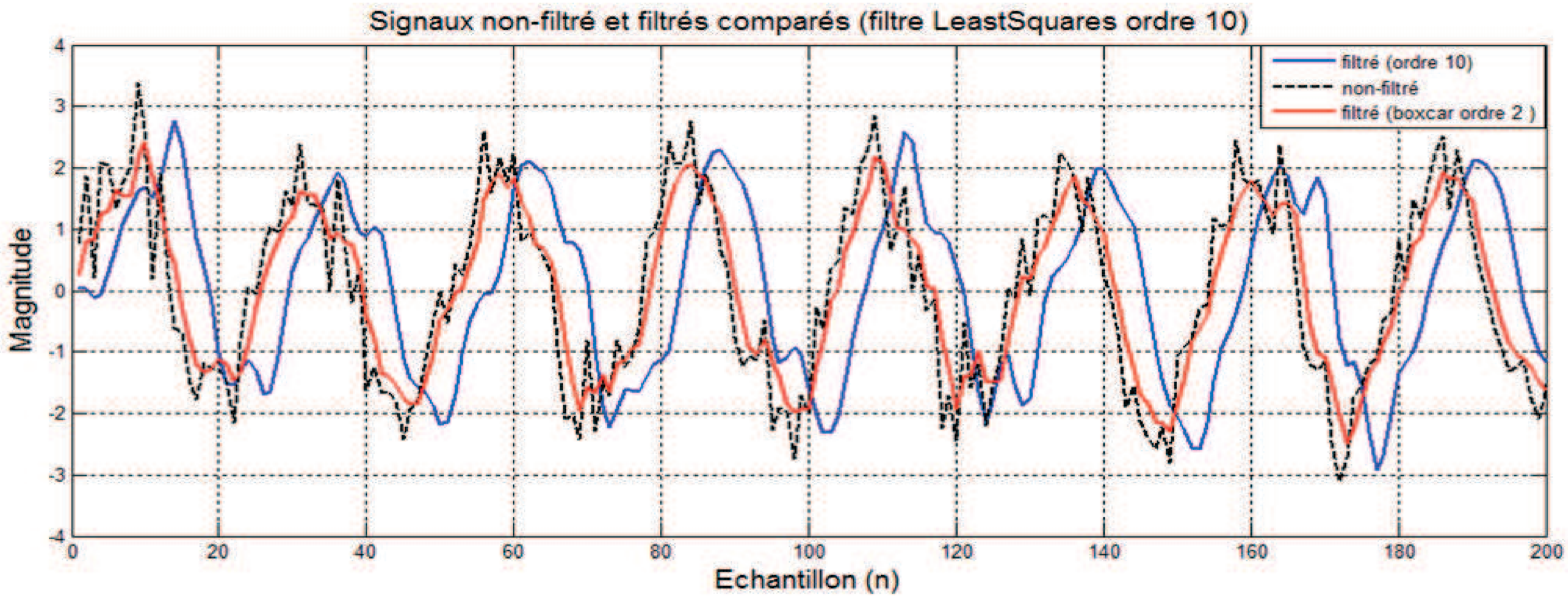


Un fonction de pondération symétrique (pas boxcar).
N = 11 *(j = 5)*
L'ordre du filtre = 10

Filtrer dans le domaine temporel

Un exemple simple II

L'effet de varier le nombre de coefficients (N)

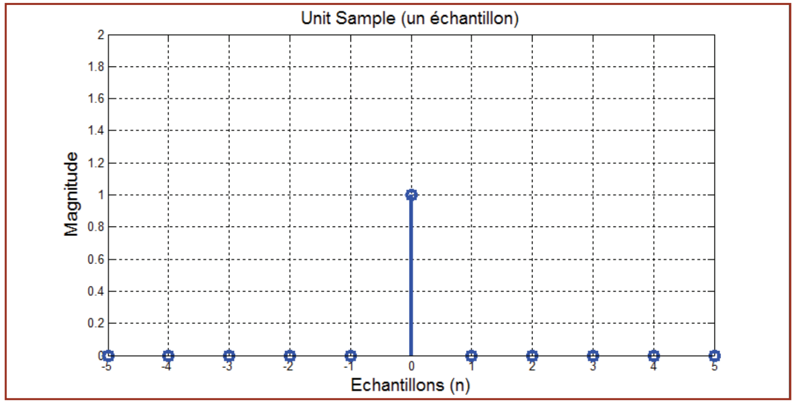


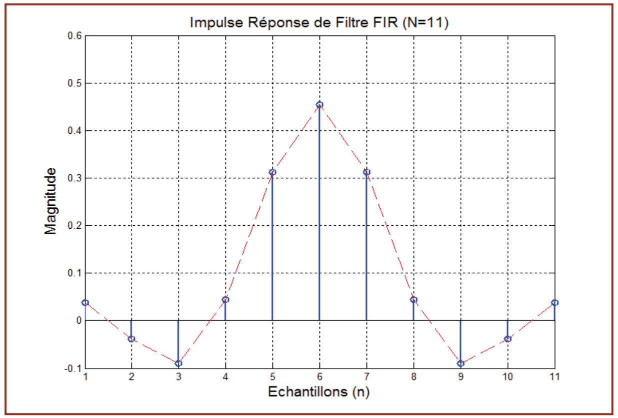
La Fonction de Pondération et **La Réponse Impulsionnelle**

Définition:
La réponse du filtre à une perturbation dans un signal d'entrée qui est, néanmoins, constant.

Entrée: Unit sample

Réponse à « Unit sample » ou Réponse Impulsionnelle (***h(n)***)





La Fonction de Pondération est symétrique

La Fonction de Pondération = La réponse impulsionnelle.

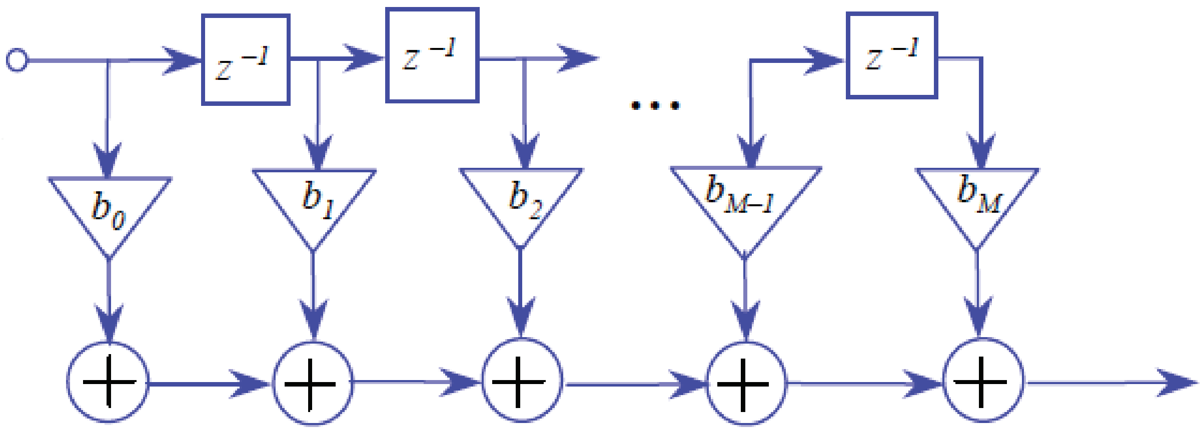
Equations de Différence et **Schéma Bloc**

Equation de différence:

$$Y[n] = b_0.x[n]+b_1.x[n-1]+b_2.x[n-2]+\ldots+b_N.x[n-j]$$

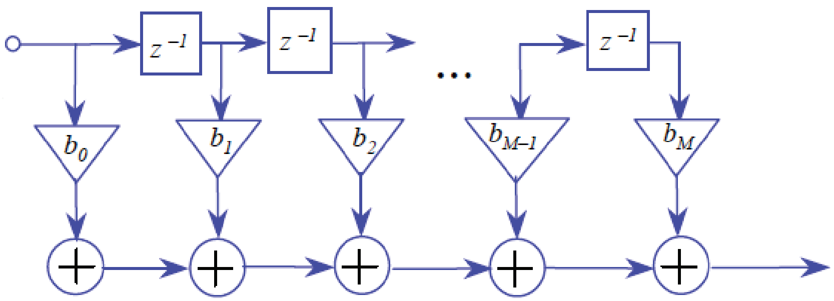
b_0 = coefficients ou valeurs de la fonction de pondération
N = nombre de coefficients
j = le nombre d'échantillons contribuant au filtrage
n = les échantillons du signal d'entrée.

Schéma Bloc



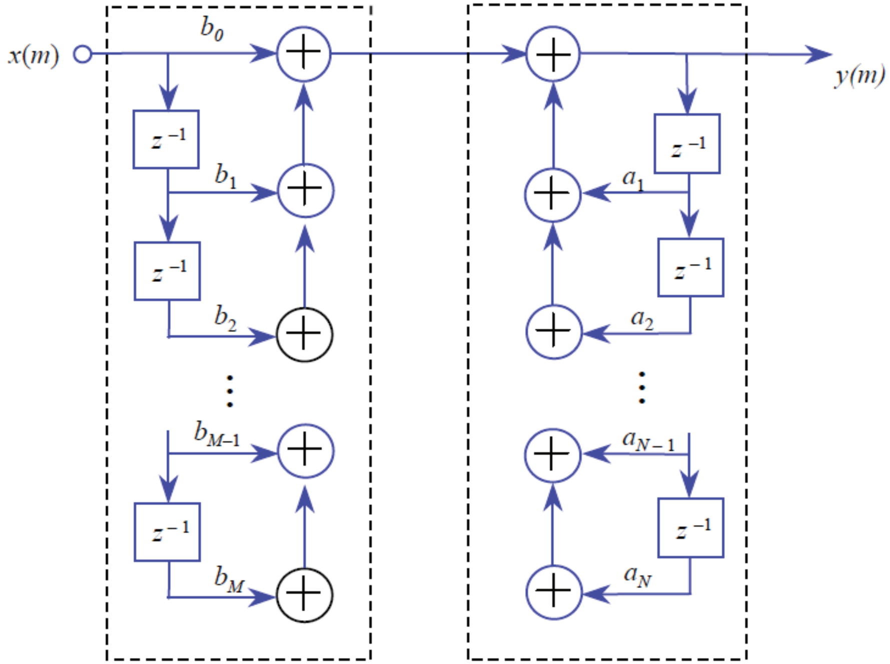
Filtres Non-récursifs et Récursifs

Non -Récursifs



$$y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_0 x(n-k)$$

Récursifs



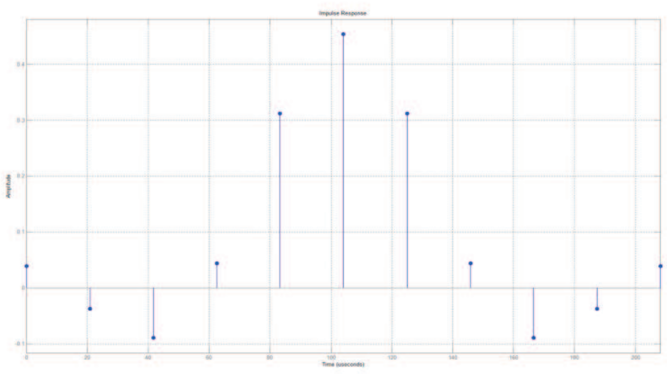
Non-récursif *Récursif*

$$y[n]=\underbrace{\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)}_{\text{entrée}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)}_{\text{sortie}}$$

Filtres Non-récursifs et **Récursifs**

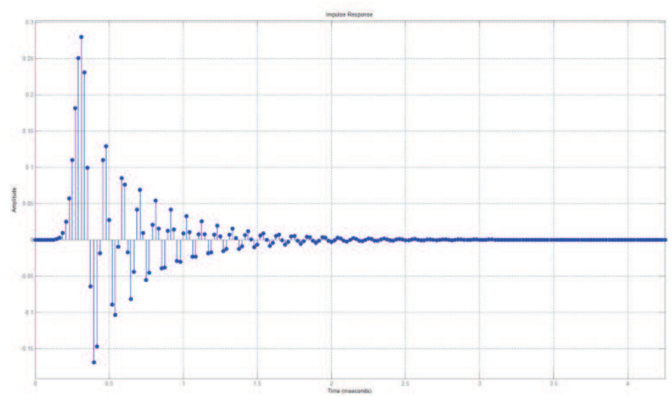
Filtres non-récursifs

Filtres **Finite Impulse Response (FIR)**



Filtres récursifs

Filtres **Infinite Impulse Response (IIR)**



- On a un signal *X*t, *Xt+p, Xt+2p…*
- Je connais la réponse impulsionnelle de mon filtre

Comment appliquer le filtre?

CONVOLUTION

$Y = W \otimes X$

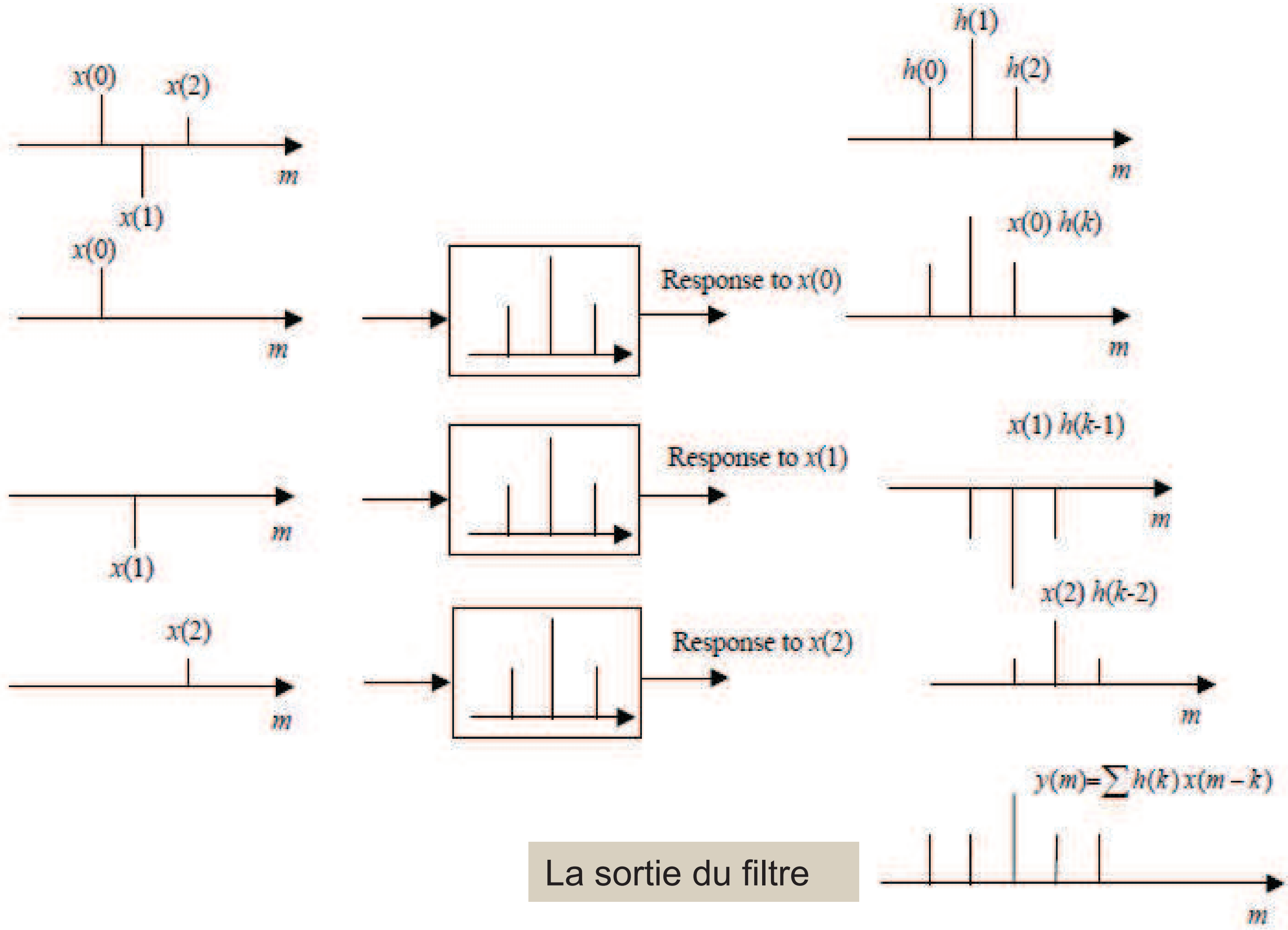
$$Y_t = \sum_{i=-j}^{j} W_i * X_{t+i}$$

Echantillon à filtrer = X_t
La valeur filtrée de X_t = Y_t
W = la fonction de pondération ou Réponse Impulsionnelle.
t = la pointe temporelle actuelle
j = la nombre d'échantillons avant/après X_t contribuant au filtrage.

Filtrer dans le domaine temporel — Convolution

Signal d'entrée

Réponse Impulsionnelle



La sortie du filtre

Le domaine temporel au domaine fréquentiel

La Multiplication dans le domaine fréquentielle
=
La Convolution dans le domaine temporel

Domaine temporel

Signal non-filtré ⊗ Réponse Impulsionnelle = Signal filtré

Transforme de Fourier ↓ ↑ Transforme de Fourier inverse

Transforme de Fourier ↓ ↑ Transforme de Fourier inverse

Transforme de Fourier ↓ ↑ Transforme de Fourier inverse

Spectre du signal non-filtré x Fonction de Transfert = Spectre filtré du signal

Domaine fréquentiel

BLRI
Brain & Language Research Institute

LA FIN

BLRI
Brain & Language Research Institute

Propositions de sujets…

SIGNAUX ELECTROMAGNETIQUES : EEG et MEG

1. Pré-traitements avec EEGLab
2. Pré-traitements : nettoyage des données
3. Pré-traitements : filtrage
4. Pré-traitements : ICA
5. Analyse des données en temporel : réponses induites et évoquées
6. Analyse fréquentielle et temps-fréquences
7. Localisation des sources : modèles direct et inverse

IRMf

1. Principe de l'IRMf
2. Efficacité d'un Design expérimental
3. Pré-traitements
4. Introduction aux traitements statistiques sur SPM
5. Analyse factorielle

METHODES D'IMAGERIE FONCTIONNELLE

1. EEG, MEG et IRMf : avantages et inconvénients des méthodes
2. EEG, MEG et IRMf : conception d'un design expérimental